Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2017/2018**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Caractéristique d'un anneau, extensions simple, extensions finies - TD 8

1. Montrer que si m est un nombre entier positif tel que $m \cdot a = 0_R$ pour tout $a \in R$, alors la caractéristique n de R divise m.

2. Montrer que nous avons car$R = n \in \mathbb{Z}_{>0}$ si et seulement si n est le plus petit nombre entier positif tel que $n \cdot 1_R = 0_R$.

3. Si R est un anneau avec car$R = p$ où p est un nombre premier, alors

$$(a+b)^p = a^p + b^p \quad \text{et} \quad (a-b)^p = a^p - b^p$$

pour tous $a, b \in R$.

4. Si R est un anneau intègre avec car$R = p$ où p est un nombre premier, alors l'application (de Frobenius) $F : R \to R$, $a \mapsto a^p$ est un monomorphisme. De plus, si R est fini, alors F est un isomorphisme.

5. Soit R est un anneau intègre et $F := \mathrm{Frac}(R)$. Montrer que $\mathrm{Frac}(R[x]) = R(x) = F(x)$.

6. Montrer que $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[i]) = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q}(i)$.

7. Montrer que $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[\sqrt{3}]) = \{a + b\sqrt{3} \,|\, a, b \in \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

8. Soit E/F et $a, b \in E$. Montrer que $F(a, b) = F(a)(b) = F(b)(a)$.

9. Soient $F \subseteq E \subseteq K$ des corps tels que K est une extension simple de F. Montrer que K est une extension simple de E.

10. Montrer que $[\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] = 2$.

11. Montrer que $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 2$.

12. Soit E/F. Montrer que nous avons $[E : F] = 1 \Leftrightarrow E = F$.

13. Soient $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n$ des corps, avec $n \geq 3$. Montrer que

$$[F_n : F_1] = \prod_{i=1}^{n-1} [F_{i+1} : F_i].$$

14. Soient $F \subseteq E \subseteq K$ des corps tels que $[K : F] = p$, où p est un nombre premier. Dans ce cas, soit $K = E$ soit $E = F$. De plus, K est une extension simple de F.

15. Soit F un corps fini avec $|F| = q$, et soit E/F avec $[E : F] = n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que E est un corps fini avec $|E| = q^n$.

16. Si F est un corps fini, alors $|F| = p^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, où $p = \mathrm{car}F$.